

Zeitreihenanalyse in 60 Minuten

Stefan Hupfeld

30. Mai 2007

1 Zeitreihen im Allgemeinen

Eine Zeitreihe ist eine geordnete Abfolge von Zufallsvariablen z_t mit $t = \mathbb{T}$. Im Gegensatz zu Querschnittsdaten kann die Zeitreihe (normalerweise) nur in einer einzelnen Realisierung beobachtet werden. Ohne weitere Annahmen können die Momente der Verteilung von z_t nicht geschätzt werden. Diese Annahmen sind in der Regel:

1. Stationarität: z_t und z_{t+k} folgen der gleichen Verteilung.
2. Ergodizität: Für $k \rightarrow \infty$ werden z_t und z_{t+k} unabhängig.

Statt strenger Stationarität wird meistens nur Kovarianz-Stationarität verlangt, das heißt, die Kovarianz von z_t und z_{t+k} hängt nur von k , aber nicht von t ab. Diese Eigenschaft verhindert, dass ein Prozess explodiert, sondern in irgendeiner Form zu einem Mittel zurückkehrt (Mean Reversion).

Die (Auto-) Kovarianz geteilt durch die Varianz ergibt die Autokorrelation, bzw. grafisch das Korrelogramm.

2 Einige bestimmte datengenerierende Prozesse

2.1 White Noise

Ein Prozess mit $E(z_t) = 0$, positiver Varianz und Kovarianz von null (bzw. Unabhängigkeit) ist White Noise.

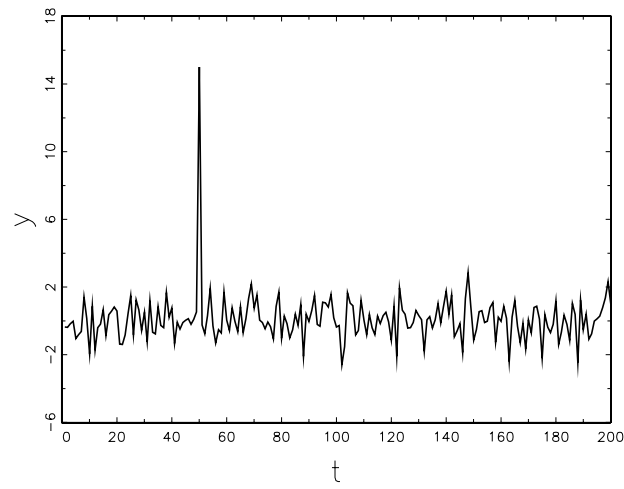


Abbildung 1: White Noise, Schock bei $t = 50$

2.2 Random Walk

Wenn ϵ_t White Noise ist, dann nennt man $z_t = \sum_{i=1}^t \epsilon_i$ Random Walk.

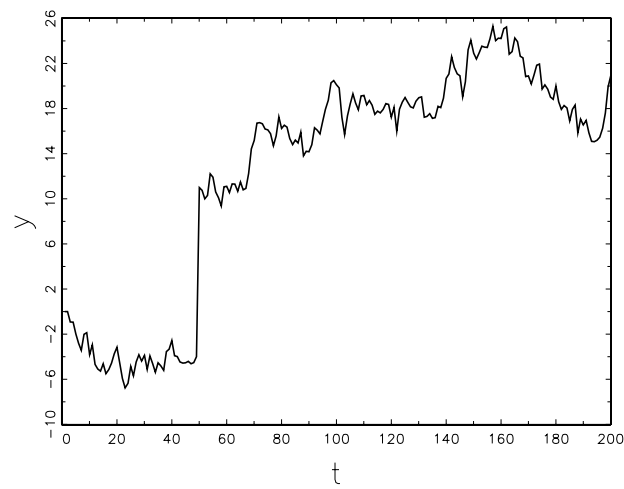


Abbildung 2: Random Walk, Schock bei $t = 50$

2.3 Martingal

Ein Prozess mit $E(z_t|\{z_{t-1}\}) = z_{t-1}$ ist ein Martingal. Der Prozess $z_t - z_{t-1}$ mit $E(z_t - z_{t-1}|\{z_{t-1}\}) = 0$ ist eine Martingale Difference Series.

2.4 Moving Average Prozesse

Ein Prozess, der sich als

$$z_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q\epsilon_{t-q}$$

schreiben lässt, ist ein Moving Average Prozess $MA(q)$, wobei $q \rightarrow \infty$ prinzipiell möglich ist, allerdings müssen dann alle θ_i absolut summierbar sein. Die Varianz und Kovarianz ist besonders einfach zu berechnen, mit der Besonderheit $\text{Cov}(z_t, z_{t-k}) = 0$ wenn $k > q$.

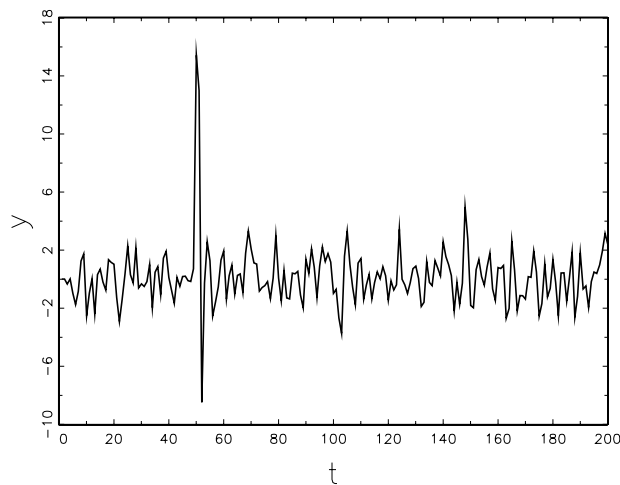


Abbildung 3: MA(2) Prozess, $\theta_1 = 0.9$, $\theta_2 = -0.5$, Schock bei $t = 50$

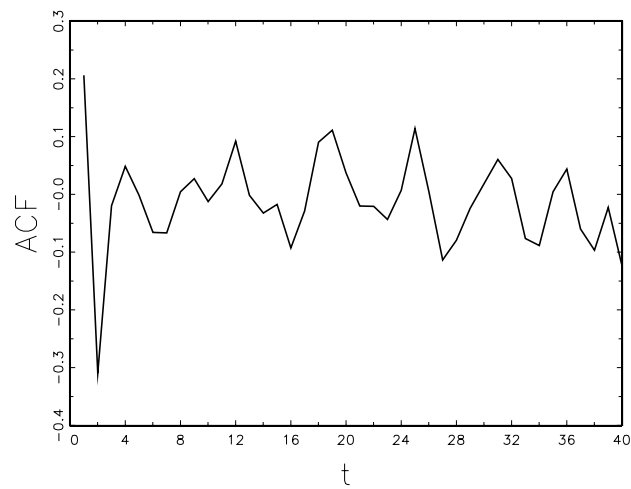


Abbildung 4: ACF von MA(2) Prozess, $\theta_1 = 0.9$, $\theta_2 = -0.5$, Schock bei $t = 50$

2.5 Autoregressive Prozesse

Ein Prozess, der sich als

$$z_t = \mu + \phi_1 z_{t-1} + \dots + \phi_p z_{t-p}$$

schreiben lässt, ist ein $AR(p)$. Jeder stationäre $AR(p)$ lässt sich als $MA(\infty)$ darstellen. Der Prozess ist stationär, wenn das Polynom $\phi_p(L)$ keine unit root hat. Die Autokorrelation eines AR wird (theoretisch) nie null.

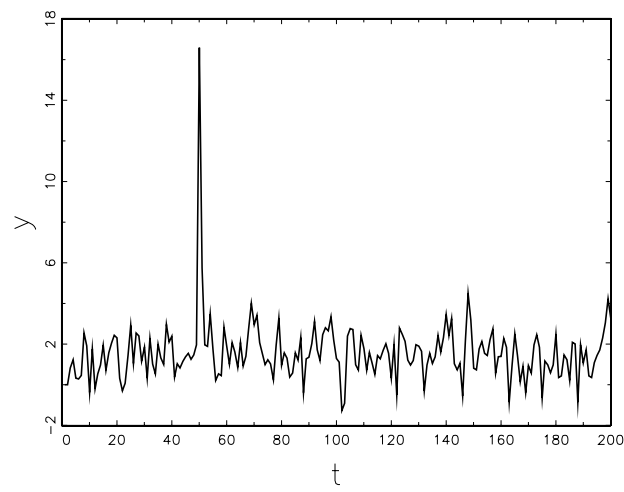


Abbildung 5: AR(1) Prozess, $\phi_1 = 0.3$, Schock bei $t = 50$

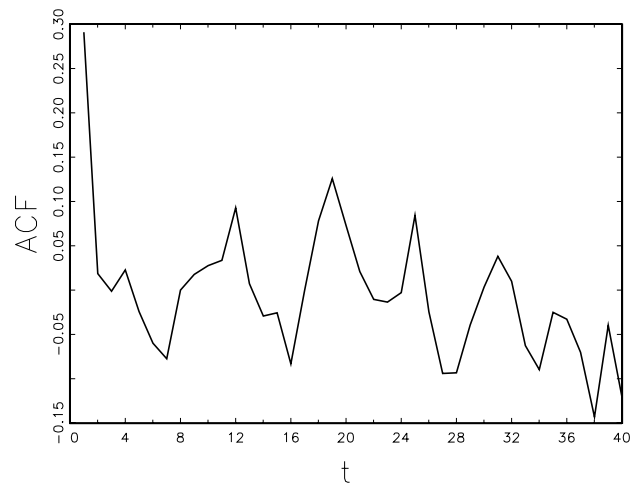


Abbildung 6: ACF von AR(1), $\phi_1 = 0.3$, Schock bei $t = 50$

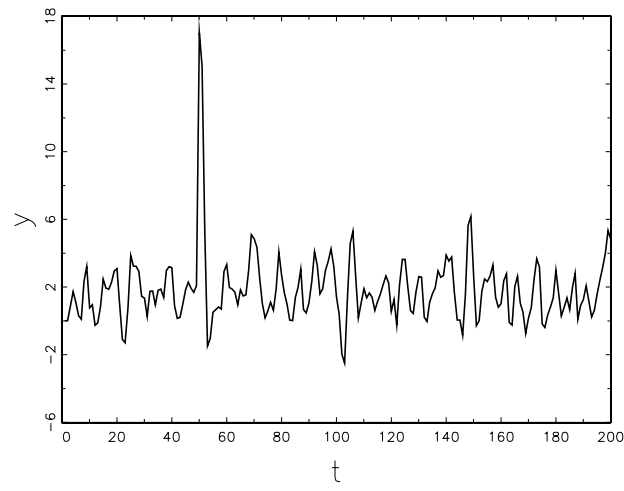


Abbildung 7: AR(2) Prozess, $\phi_1 = 0.9$, $\phi_2 = -0.5$, Schock bei $t = 50$

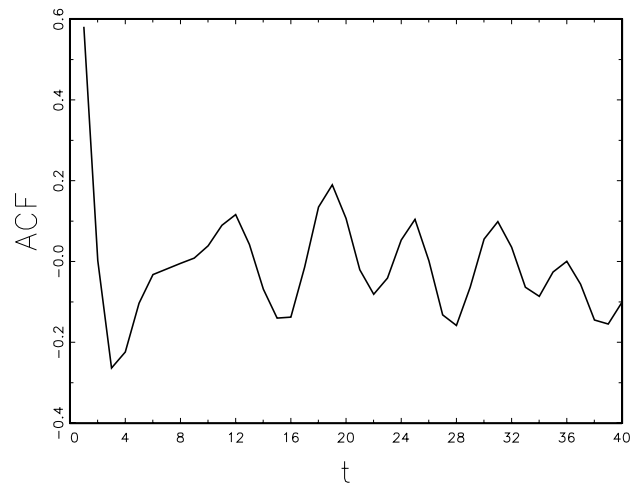


Abbildung 8: ACF von AR(1), $\phi_1 = 0.9$, $\phi_2 = -0.5$, Schock bei $t = 50$

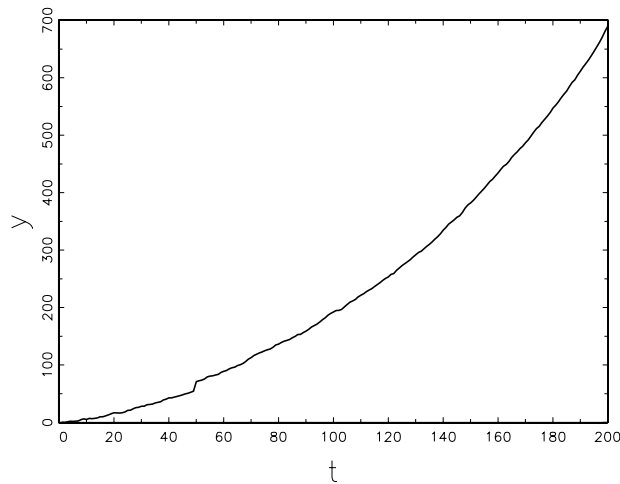


Abbildung 9: AR(1) Prozess, $\phi_1 = 1.01$, Schock bei $t = 50$

2.6 ARMA Prozesse

Ein Prozess, der Elemente eines AR und MA Prozesses hat, heißt ARMA(p, q).

3 Nicht-stationäre Prozesse

Es werden zwei grundsätzliche Arten nicht-stationärer Prozesse unterschieden:

1. Trend-Stationäre Prozesse: $z_t = \mu + \delta t + \epsilon_t$
2. Differenz-Stationäre Prozesse: $z_t = z_0 + \delta t + \sum_i \epsilon_i$

3.1 Integrierte Prozesse

Ein DS-stationärer Prozess z_t ist ein I(1) Prozess, da die erste Differenz $\Delta z_t = z_t - z_{t-1}$ stationär ist. Ein Prozess kann natürlich mehrfach integriert sein; wenn erst $\Delta \Delta z_t$ stationär ist, ist z_t ein I(2) Prozess. Ein I(0) ist dann erreicht, wenn der Prozess (1) stationär ist und (2) immer noch eine positive Varianz (LRV) hat.

Ist der Prozess z_t ein I(d), und wird der (mehrfach) differenzierte Prozess $\Delta^d z_t$ als ARMA(p, q) Modell geschätzt, so spricht man in Bezug auf den originalen Prozess z_t auch von einem ARIMA(p, d, q)-Modell.

3.2 Schocks in nicht-stationären Prozessen

Es gibt einen Unterschied bei der Wirkung von Schocks, ob ein Prozess DS oder TS ist: Beim TS wird der Schock über die Zeit abgebaut, und die Zeitreihe kehrt zum ursprünglichen Prozess zurück. Beim DS hebt ein Schock die Zeitreihe auf ein dauerhaft neues Niveau.

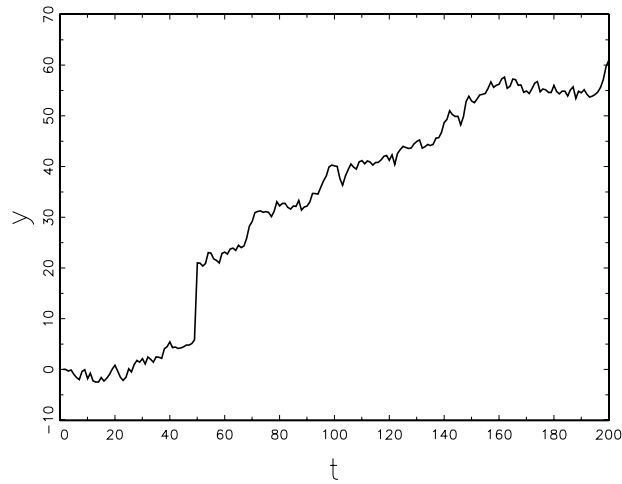


Abbildung 10: Differenz-Stationärer Prozess, Schock bei $t = 50$

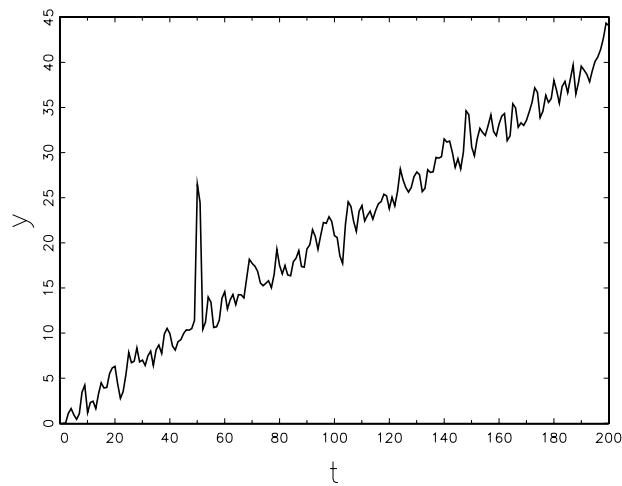


Abbildung 11: Trend-Stationärer Prozess, Schock bei $t = 50$

3.3 Zyklen

Ein Zyklus kann entweder ausdrücklich modelliert werden, oder bleibt nach der Entfernung des/der Trends übrig, also

$$\eta_t = z_t - \delta t - \sum_s \epsilon_s.$$

3.4 Tests

- Box-Pierce und Ljung-Box Q : Testen die H_0 : Abwesenheit von Autokorrelation.
- Dickey-Fuller Test: Testet die H_0 : z_t ist ein Random Walk ohne Drift

4 Vektor-Prozesse

4.1 Vektor ARMA Prozesse

Im allgemeinen Fall als VARMA Prozess, z.B.:

$$\begin{aligned}y_{1t} &= \mu_1 + \phi_{11}y_{1t-1} + \phi_{20}y_{2t} + \dots + \theta_{11}\epsilon_{1t-1} + \theta_{20}\epsilon_{2t} + \dots \epsilon_{1t} \\y_{2t} &= \mu_2 + \phi_{21}y_{2t-1} + \phi_{10}y_{1t} + \dots + \theta_{21}\epsilon_{2t-1} + \theta_{10}\epsilon_{1t} + \dots \epsilon_{2t}\end{aligned}$$

Hiermit kann insbesondere Endogenität verschiedener Größen abgebildet werden. Wichtige Schätzergebnisse: Impulse-Response Functions (wie wirken Schocks auf die y über die Zeit) oder Granger-Kausalität (Signifikanz der Kreuzparameter im VAR-Teil).

Um diese Prozesse zu schätzen, müssen wieder die θ der $MA(\infty)$ -Repräsentation absolut summierbar sein, was der Stabilität des Lag-Polynoms $\Phi(L)$ entspricht (die einzelnen ϕ dürfen in ihrer Zusammenwirkung nicht zu gross sein).

4.2 Tests

Parameterrestriktionen (z.B. H_0 : y_1 does not Granger-cause y_2) mit Likelihood-Ratio.

4.3 Kointegration

Wie im eindimensionalen Fall können auch hier die einzelnen Elemente des Vektors y_t nicht-stationär (also integriert) sein. Im mehrdimensionalen Fall kann aber auch der Fall auftreten, dass nicht nur die (d -te) Differenz eines Teilprozesses stationär ist, sondern auch die Linearkombination mehrerer Teilprozesse. Ist das der Fall, spricht man von kointegriertem Prozess.

Bildliches Beispiel: The Drunk and Her Dog. Obwohl die Betrunkene und ihr Hund jeweils einem Random Walk folgen (also nicht-stationär sind), folgen sie gemeinsam, verbunden durch die Hundeleine, einem stationären Prozess und kehren immer wieder auf den Gehweg zurück.

Durch Kointegration kann eine langfristige (Gleichgewichts-) Beziehung zwischen Variablen gefunden werden, z.B. als Antwort auf die Frage, um wieviel der 5-Jahres Zinssatz höher ist als der für Tagesgeld etc.

4.4 Vector-Error-Correction Modell

Die Veränderung der abhängigen Variablen (also Δy_t mit y_t als Vektor) wird u.a. durch die Abweichung von der kointegrierten Beziehung geschätzt:

$$\begin{aligned}\Delta y_{1t} &= \alpha_1(y_{1t} - \beta y_{2t}) + \gamma_{11}\Delta y_{1t-1} + \gamma_{12}\Delta y_{2t-1} \\ \Delta y_{2t} &= \alpha_2(y_{1t} - \beta y_{2t}) + \gamma_{22}\Delta y_{2t-1} + \gamma_{21}\Delta y_{1t-1}\end{aligned}$$

5 (G)ARCH-Prozesse

5.1 ARCH

Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. Ein ARCH-Prozess ist ein AR-Prozess in der Varianz. Verzichten wir auf einen Mittelwertprozess, bedeutet das:

$$\begin{aligned}y_t &= \sqrt{h_t}\epsilon_t \\ h_t &= \omega + \alpha y_{t-1}^2\end{aligned}$$

Der Prozess erlaubt eine gewisse Persistenz der Varianz.

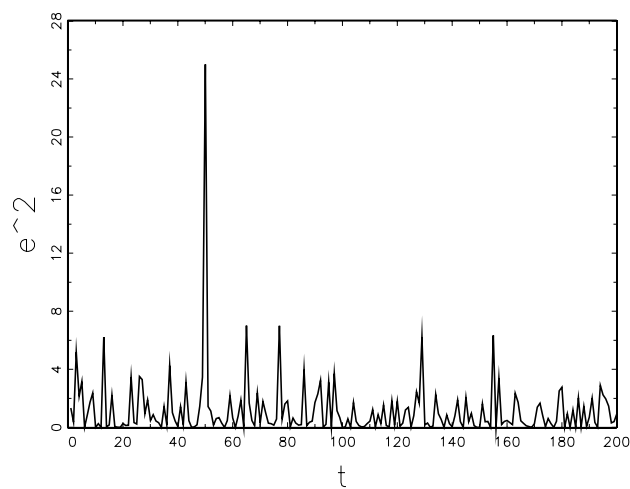


Abbildung 12: Varianz von e , Schock bei $t = 50$

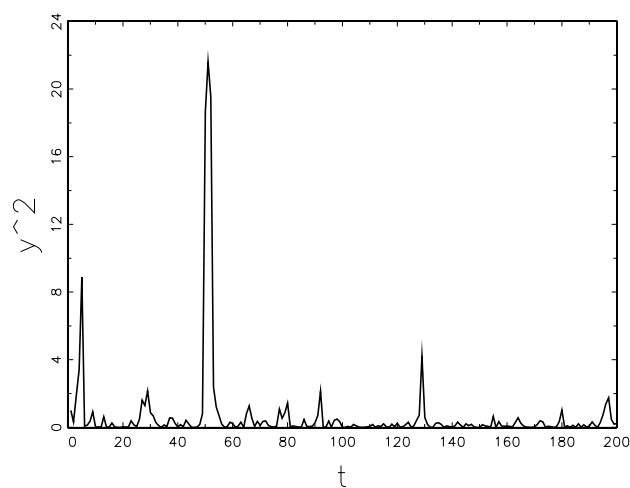


Abbildung 13: Varianz von y (ARCH), Schock bei $t = 50$

5.2 GARCH

Fügt einen weiteren Term hinzu (generalisiert):

$$h_t = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}$$

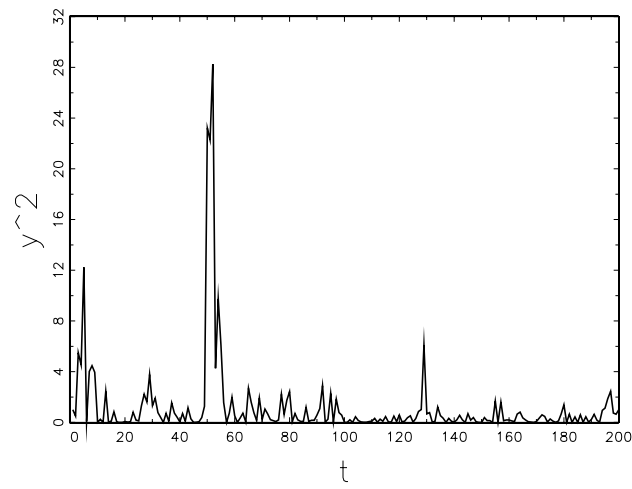


Abbildung 14: Varianz von y (GARCH), Schock bei $t = 50$

5.3 Erweiterungen

- Multivariate GARCH Prozesse
- Exponential GARCH
- Threshold Crossing GARCH
- (...)